Analiza Matematyczna I.2, kolokwium
27 marca 2014, 17:15 — 20:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Zadanie 0. Niech $f, g\colon (0,\infty) \longrightarrow$ będą funkcjami różniczkowalnymi przy czym dla każdego $x \in (0,\infty)$ spełniony jest warunek $g'(x) \neq 0 \neq g(x)$.
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 27$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$?

Zadanie 1. Wyznaczyć stałe dodatnie A, B, C, dla których istnieje taka funkcja ciągła $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, że

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A\sqrt{x} - B}{x^2 - 4} & \text{dla } x > 2, \\[2ex] \dfrac{\ln(C\,x)}{x - 2} & \text{dla } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Zadanie 2. Wykazać, że dla każdych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $x > y \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{arctg}(x-y) + \left(\sqrt{3} - 1\right)\operatorname{arctg}(y) < \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}y\right).$$

Zadanie 3. Funkcja f jest ciągła na przedziale $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right]$ i spełnia warunek

$$f\left(2\sqrt{2}\right) - f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby x zachodzi równość $f(2x) - f(x) = 1$.

Zadanie 4. Niech $f(x) = 0$ gdy $x = 0$ lub gdy $x \notin \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = \frac{1}{q}$, gdy $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ oraz $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$.
Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$, a jeśli istnieje, znaleźć tę pochodną.

Zadanie 5. Niech $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \ln(x+1)\sqrt{x}$.
Czy funkcja f jest jednostajnie ciągła?
Czy funkcja f spełnia warunek Lipschitza?

Zadanie 6. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ nierówność $e^{x+a} > (x-a)^2$ zachodzi dla każdego $x \in (0,\infty)$?

Kolokwium z Analizy Matematycznej, 13 kwietnia 2015r.

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos 2x)}{x\sin(\sin x)}\right).$$

2. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $2f(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponadto $f(0) = a$. Wykazać, że $f(x) = ae^{2x}$.

3. Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}.$$

4. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$x^x \cdot y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}.$$

5. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - x}{\operatorname{tg}(2x) - 2\ln(1+x) - x^2}.$$

6. a) Funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = ax^2 + bx + c$ spełnia

$$g(0) = g(1) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad g''(x) = 1 \text{ dla wszystkich } x.$$

Wyznaczyć a, b, c oraz udowodnić, że $g(x) \geq -1/8$ dla wszystkich x.

b) Dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x) \leq 1 \text{ dla wszystkich } x.$$

Dowieść, że dla dowolnej liczby $x \in [0,1]$ zachodzi $f(x) \geq -1/8$.

Wskazówka do b): zbadać funkcję $f - g$.

Kolokwium z Analizy Matematycznej, 25 maja 2015r.

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

(tylko z 1 zadania)

1. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty}(5n+(-1)^n)^n x^{2n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}.$$

2. Zbadać, czy ciąg funkcji $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dany wzorem

$$f_n(x) = \frac{nx}{(nx+1)^n}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

jest zbieżny jednostajnie na $[0,\infty)$.

Z PJ:

3. Rozstrzygnąć, czy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(n+x^2)(\ln n)^2}$$

jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \exp(2x)\cos^3 x \, dx.$$

5. Rozwinąć funkcję

$$f(x) = \frac{2+x}{(2-x)(4+x^2)}$$

w szereg potęgowy wokół zera oraz obliczyć $f^{(15)}(0)$ (pochodną rzędu 15 funkcji f w punkcie $x=0$).

6. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x - n\sin(x/n))$$

jest dobrze określona i różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Egzamin z Analizy Matematycznej, 18 czerwca 2015r.

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

śr 8

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}.$$

6,8

2. Wyznaczyć liczbę dodatnią x, dla której wartość całki

$$\int_0^{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{2\pi t}{t+2}\right) dt$$

jest największa.

5,5

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^1 \frac{x^a |\sin x|^b}{\exp(x^2) - 1} dx,$$

gdzie a, $b > 0$ są ustalonymi parametrami.

2,7

4. Dana jest krzywa zamknięta $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   a) Obliczyć długość tej krzywej.
   b) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót φ wokół osi OX.

3,6

5. Rozważmy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

   a) Wyznaczyć jawny wzór na sumę tego szeregu.
   b) Czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$?

3

6. Dla ustalonej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $n = 1, 2, \ldots$, określamy

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Dowieść, że $(f_n)_{n\geq 1}$ zbiega punktowo do f.
   b) Niech M będzie ustaloną liczbą dodatnią. Dowieść, że $(f_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny do f jednostajnie na $[-M, M]$.

Analiza Matematyczna I.2, pierwsze kolokwium
8 kwietnia 2016, 16:15 — 18:45

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach, z innych twierdzeń można skorzystać podawszy uprzednio pełny dowód każdego z nich.

Za każde zadanie można otrzymać nie więcej niż 7 punktów.

---

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x\cos x}{2\tan(x) - \ln(1+2x) - 2x^2}$$

lub wykazać, że granica ta nie istnieje.

---

2. Wyznaczyć kres górny funkcji

$$f(x) = \ln\frac{e^x}{e^x - 1} \overset{-}{\cancel{+}} \frac{2}{x}$$

na przedziale $(0, \infty)$.

---

3. Wyznaczyć, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbf{R}$, liczbę rozwiązań równania

$$x \ln|x| + ax + 1 = 0.$$

---

4. Czy funkcja $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ jest jednostajnie ciągła na

a) $(0, \pi)$,

b) $(0, \infty)$,

c) $\left\{-n - \frac{1}{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$?

---

5. Wykazać, że dla wszystkich $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\ln x^4 \leq (1 - \ln 2)x^2 + 2(\ln 4 - 1)x.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej I.2

18 czerwca 2016, 9:15 — 12:45

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach, z innych twierdzeń można skorzystać podawszy uprzednio pełny dowód każdego z nich.
Za każde zadanie można otrzymać nie więcej niż 10 punktów; ostateczny wynik to suma punktów z zadań pomnożona przez 5/6 i zaokrąglona w górę do najbliższej liczby całkowitej.

---

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+1}{n^4+k^4}.$$

---

2. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \ln(1+\sin(tx))\,dt.$$

---

3. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$, gdzie

$$c_n = \begin{cases} 3 & \text{dla } n = 4k+1, \quad k \in \mathbf{N}, \\ -1 & \text{dla pozostałych } n. \end{cases}$$

---

4. Zbadać, dla jakich $a \in \mathbb{R}$ całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} x^{-5a} \ln(1+x^{2a})\,dx$$

jest zbieżna. Obliczyć jej wartość dla $a = \frac{1}{4}$.

---

5. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Wykaż, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f(x-n)$ jest zbieżny punktowo na $\mathbb{R}$ do pewnej funkcji $F(x)$, różniczkowalnej na $\mathbb{R}$.

b) Czy funkcja F jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$? Czy spełnia na $\mathbb{R}$ warunek Lipschitza?

---

6. Funkcja $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Wykazać, że funkcja g dana wzorem $g(x) = f(x) - |x|$

a) spełnia na $[-1,1]$ warunek Lipschitza,

b) jeżeli L jest stałą Lipschitza funkcji g na $[-1,1]$, to $L \geq 1$.

Analiza Matematyczna I.2, egzamin poprawkowy
21 września 2016, 11:30-14:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!* Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach, z innych twierdzeń można skorzystać podawszy uprzednio pełny dowód każdego z nich.

Trzy pierwsze zadania mają charakter testu: w pudełku obok każdego podpunktu należy wpisać **T** (tak) lub **N** (nie); poprawna odpowiedź na którykolwiek podpunkt a), b), c) jest warta 1 punkt; poprawna odpowiedź na wszystkie 3 podpunkty zadania nagradzana jest 2-punktowym bonusem.
Za każde z pozostałych zadań można otrzymać maksymalnie do 10 punktów.

---

1. Jeżeli funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

☐ a) f spełnia na $(0,1)$ warunek Lipschitza;

☐ b) istnieją skończone granice $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ i $\lim_{x\to 1^-} f(x)$;

☐ c) istnieje różniczkowalna funkcja $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in (0,1)$ zachodzi $f(x) = g(x)$.

---

2. Funkcja $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $(0,4)$ i ciągła na $[0,4]$. Wynika stąd, że

☐ a) f' jest jednostajnie ciągła na $(0,4)$;

☐ b) istnieje $x \in (0,4)$ takie, że $f(3) - f'(x) = f(2)$;

☐ c) jeżeli dla pewnego $x \in [1,3]$ zachodzi $f(x) = \inf\{f(t) \ : \ t \in [1,4]\}$, to $f'(x) = 0$ lub $f'(x)$ nie istnieje.

---

3. Funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna. Wynika stąd, że

☐ a) dla pewnego $y \in [0,1]$ istnieje $\lim_{x\to y} f(x)$;

☐ b) f ma na $[0,1]$ własność Darboux;

☐ c) dla każdego $y \in [0,1]$ istnieje $\lim_{x\to y} f(x)$.

4. Dla jakich $a > 0$ długość wykresu funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \in (0,1], \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

jest skończona?

---

5. Funkcja $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x - t| \sin x \, dx.$$

Znajdź jej kresy.

---

6. Dla jakich par liczb rzeczywistych a i b zbieżna jest całka

$$\int_0^{\pi/2} (t \sin t)^a (t - \pi/2) \cos^b t \, dt \ ?$$

---

7. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Zbadaj zbieżność i zbieżność jednostajną ciągu funkcyjnego o wyrazie

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right)$$

na przedziale $[0,1]$.

---

5. IV. 2018

(1) Zbadać jednostajną ciągłość funkcji

$$f(x) = (e^x - 1)\sin\frac{1}{5^x - 1}$$

na zbiorach $A = (0, 2018)$ i $B = (0, +\infty)$.

(2) Dowieść, że jeśli $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$, to

$$3\alpha \operatorname{tg}\alpha + 2\beta \operatorname{tg}\beta + \gamma \operatorname{tg}\gamma \geqslant (3\alpha + 2\beta + \gamma) \operatorname{tg}\frac{3\alpha + 2\beta + \gamma}{6}.$$

Dla jakich α, β, γ zachodzi równość?

(3) Wyznaczyć kres dolny i kres górny [wartości] funkcji

$$f(x) = x\left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right).$$

(4) Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a i b, dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x \sin x}, & x \in (-\pi, 0) \\ ax + b\cos x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, +\infty)$.

---

(5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła i różniczkowalna. Wykazać, że jeśli pochodna funkcji f, funkcja $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona, to nie jest ona [ta f'] jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Niech x_n: $|f'(x_n)| \geqslant n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Przyp., że f' jest jednostajnie ciągła, niech $\delta = \delta(\varepsilon = 1)$. Zatem $|f'|\big|_{(x_n - \delta, x_n + \delta)} > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. W szczególności $|f'|\big|_{(x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n})} > n$ ddd n. Wtedy $\left|f(x_n + \frac{1}{2n}) - f(x_n - \frac{1}{2n})\right| = \frac{1}{n}|f'(c_n)| > \frac{n}{n} = 1$, sprz.

II kolokwium z AM 1.2

17 maja 2018, 14:15-17:00

Rozwiązanie każdego zadania **musi** mieścić się na oddzielnych kartkach. Proszę starannie podpisać (imię, nazwisko, nr indeksu, grupa ćwiczeniowa) wszystkie oddane arkusze! Wszystkie zadania są oceniane równo, w skali 0–10 punktów; ostateczny wynik kolokwium to suma uzyskanych punktów pomnożona przez $\frac{35}{50}$.

Nie wolno korzystać z notatek, pomocy koleżeńskiej, kalkulatorów, telefonów ani innych środków telekomunikacji.

Zadanie 1. Niech $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{1 - x^2}$. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(\sin x) - \sin(f(x))}{x^4}$.

Zadanie 2. Niech $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x) = x^2 + n^\alpha x \exp(-nx^2).$$

Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na $[0,1]$ w zależności od $\alpha > 0$.

Zadanie 3. Wykazać, że funkcja określona jako suma szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^6}{x^6 + n^6}$$

jest dobrze określona i ma ciągłą pochodną na zbiorze $[0, \infty)$.

Zadanie 4. Niech funkcja f będzie określona szeregiem potęgowym:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad \text{gdzie} \qquad b_n = \sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

(a) Wyznaczyć wszystkie punkty zbieżności tego szeregu.

(b) Wyznaczyć funkcję f wzorem jawnym przez funkcje elementarne.

(c) Znaleźć funkcję F, taką że $F'(x) = f(x)$.

(d) Znając funkcję F obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+1)(n+2)}$.

Zadanie 5. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, nieparzystą i okresową o okresie 4. Zbadać, czy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f\left(2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n+1} x\right)}{\sqrt{n^2 + \cos x}}$$

jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Egzamin z **analizy matematycznej 1.2** (termin I)

23 czerwca 2018, 9:15-13:00

Każdy może wybrać do rozwiązywania **5** (słownie: ***pięć***) z sześciu zadań. Za zadanie nr 6 można dostać 15 punktów. Za cały egzamin **można** otrzymać ponad 100% punktów!

Rozwiązanie każdego zadania **musi** mieścić się na oddzielnych kartkach. Proszę starannie podpisać (imię, nazwisko, nr indeksu, grupa ćwiczeniowa) wszystkie oddane arkusze! Zadania 1.–5. są oceniane równo, w skali 0–10 punktów; zadanie 6. w skali 1–15; ostateczny wynik egzaminu to suma uzyskanych punktów — liczy się **pięć** najlepiej rozwiązanych zadań — pomnożona przez **2**.
Nie wolno korzystać z notatek, pomocy koleżeńskiej, kalkulatorów, telefonów ani innych środków telekomunikacji.
Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...

Zadanie 1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{\sqrt[3]{x^7}}^{1-\cos x} \ln\left(2+\operatorname{tg}^2 t\right)\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

Zadanie 2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n^2} \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{16n^2 - \left(4j-2\right)^2}$.

Zadanie 3. Wykazać niemal jednostajną zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ln^2 n}{n^2+1}\cos(\pi n x)$ na $(0,1)$.

Wsk.: Może się przydać wzór $\sum\limits_{n=0}^{n} \cos(n\alpha) = \cos(n\alpha/2)\sin((n+1)\alpha/2)\left(\sin(\alpha/2)\right)^{-1}$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \dfrac{\left(-x\ln x\right)^{\alpha}}{x^{\beta}+(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$ w zależności od parametrów $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
UWAGA: Liczby α i β **mogą** być ujemne.

Zadanie 5. Niech $f\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą. Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$3\int_0^1 f(x)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

UWAGA: Za dowód przy założeniu, że f jest różniczkowalna (lub klasy C^1) będzie można otrzymać maksymalnie 6 punktów.

Zadanie 6 ($\star$, za **15** punktów). Niech $g\colon [0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie monotoniczna, wypukła a całka $\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ niech będzie zbieżna. Wykazać, że ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = \int_0^x g\left(t+\frac{1}{n}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{d}t$$

jest zbieżny jednostajnie na $[0,+\infty)$.